# 4.3 有理函数的积分

4.4.1 有理函数的积分

4.4.2 可化为有理函数的积分举例

# 4.4.1 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$为真分式

## 1. 有理函数的分解

有理函数 $\xlongequal[\text{相除}]{}$ 多项式 + $\boxed{\text{真分式}}$ $\xrightarrow{\text{分解}}$ $\boxed{\text{若干部分分式之和}}$

$$\frac{u^2}{u-1}=u+1+\frac{1}{u-1}$$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+, p^2-4q<0)$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B(x-1)+C+B}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{B+C}{(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)^2}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+E}{\left(1+x^2\right)^2}$$

**确定部分分式系数的方法:**

待定系数法、赋值法

例1 将下列真分式分解为部分分式: (1) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$;

解 设 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

通分,去分母得 $1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$

$$=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$$

比较系数得 $\begin{cases}A+B=0\\-2A-B+C=0\\A=1\end{cases}$ 从而 $\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=1\end{cases}$

故 原式 $=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}$

(2) $\dfrac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$

解 设原式 $= \dfrac{A}{1+2x} + \dfrac{Bx+C}{1+x^2}$,

整理得 $1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1+2x)$,

$$1 = (A+2B)x^2 + (B+2C)x + C + A,$$

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ B+2C=0, \\ A+C=1, \end{cases} \Rightarrow A=\frac{4}{5}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} + \frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}.$$

## 2. 有理函数的积分

**例1 （1）** $\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}$

$$\int\frac{1}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\int\frac{1}{x-1}d(x-1)+\ln|x|$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\ln|x|-\ln|x-1|+C$$

1. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x=A\ln|x-a|+C$

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x=\frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n}+C\quad(n\neq1)$

例2 求 $\int \frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$.

$$\boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{4}{1+2x}+\frac{-2x+1}{1+x^2}\right)}$$

解 已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{2}{5}\int\frac{d(1+2x)}{1+2x}-\frac{1}{5}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{2}{5}\ln\left|1+2x\right|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$$

3. $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}dx$$

**例3** 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$ .

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x \quad (p^2-4q<0)}$$

**解** 原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

**思考** 如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ ? 利用书$P_{175}$-Ex 6

## 四种典型部分分式的积分:

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \quad (n \neq 1)$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$

$(p^2-4q<0\,,\, n\neq 1)$

变分子为

$\frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2}$

再分项积分

**说明** 将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

$$\left(x^4+5x^2+4\right)'=4x^3+10x$$

**例4** 求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x.$ $\qquad =2(2x^3+5x)$

**解**

$$I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+5)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例5 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$ .

解 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

例6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$$

**按常规方法解:**

第一步 令 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数定 $a, b, c, d$, 得

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

第二步 化为部分分式 . 即令

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

比较系数定 $A, B, C, D$.

第三步 分项积分 .

此解法较繁!

例6 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

分析 令$x=\frac{1}{t}$ 原式$=\int \frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}dt=\int \frac{-dt}{t^2+\frac{1}{t^2}}$

$$=-\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} \quad =-\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)'=1-\frac{1}{t^2} \qquad \left(t-\frac{1}{t}\right)'=1+\frac{1}{t^2}$$

$$1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}+1+\frac{1}{t^2}\right)$$

例6 求$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)+(1+x^2)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$\text{原式}=\int\frac{-dt}{t^2+\frac{1}{t^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{t^2}+1+\frac{1}{t^2})dt}{t^2+\frac{1}{t^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)'dt}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}\quad-\frac{1}{2}\int\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)'dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}$$

求出积分后，最后再代入$t=\frac{1}{x}$

**例6** 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

**解** 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right| + C$$

## 4.4.2 可化为有理函数的积分举例

### 1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{令 } t=\tan\frac{x}{2}} \boxed{t\text{ 的有理函数的积分}}$$

万能代换

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则 $\quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

例7 求
$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x\,.$$

$$t=\tan\frac{x}{2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则

$$原式=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln\left|t\right|\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例8 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (ab \neq 0)$.

解 原式 $\displaystyle = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\int \frac{\mathrm{d}\,\frac{a}{b}\tan x}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C$$

说明 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ 的有理式的积分时，用代换 $t = \tan x$ 往往更方便.

例9 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$ .

解 因被积函数关于 $\cos x$ 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

$$\text{原式}=\int \frac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}=-\int \frac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$$

$$=-\int \frac{(t^2+1)\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4}=-\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\mathrm{d}t=-\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

注 若被积函数关于 $\sin x$ 为奇函数, 可令 $t=\cos x$

## 2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分.　$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$,

例11 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.　　令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$

解　令 $u=\sqrt[3]{x+2}$, 则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$原式 =\int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

$$=3\int \left(u-1+\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = 3\left[\ \tfrac{1}{2}u^2-u+\ln\left|1+u\right|\ \right]+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2}-3\sqrt[3]{x+2}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right|+C$$

例12 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 为去掉被积函数分母中的根式，取根指数2，3的最小公倍数6，令 $t=\sqrt[6]{x}$, $x=t^6$, 则有

$$原式 = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right]+C$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$$

$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b})\,dx$,

令 $t=\sqrt[p]{ax+b}$, $p$为$m,n$的最小公倍数.

例13 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$ .

解 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$ ,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

$$原式 =\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\mathrm{d}t=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$, 令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

## 内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$\begin{tikzcd}
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & & \text{三角函数有理式} \arrow[ll, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单无理函数} \arrow[ull, "\text{根式代换}"'] \arrow[u, "\text{三角代换}"']
\end{tikzcd}$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便, 要注意综合使用基本积分法, 简便计算.

**练习.** 求 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x.$

**解** 原式 $= \int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$

前式令 $u=\tan\frac{x}{2}$；后式配元

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u - \int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2}\mathrm{d}u - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right) - \ln|3+\cos x| + C$$